数理解析研究所講究録
第2049巻 2017年 71-82

枠付き曲面と特異点

九州産業大学工学部　福永 知則
Tomonori Fukunaga
Faculty of Engineering,
Kyushu Sangyo University

特異点を持つ曲面の微分幾何学に関しては既に沢山の文献が出版されている（全てを挙げることはできないが，例えば，[4, 9, 11, 12, 13, 14, 15] など）．著者は，共同研究 [5] において，枠を用いた平面フロンタルの微分幾何学の研究を行った．この論文では，その高次元化に相当する，枠を用いた特異点を持つ曲面の研究手法についての概要を述べる．本論文の内容は，高橋雅朋との共同研究 [6] に基づくものである．

1　枠付き曲面の定義と基本定理

1.1　枠付き曲面の定義

$U \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする．以下，特に断りの無い限り，写像は C^∞ 級とする．$\Delta = \{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in S^2 \times S^2 | \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ とする．但し，$\langle , \rangle$ はユークリッド空間の通常の内積とする．

定義 1.1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が枠付き曲面であるとは，$\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{n} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{n} \rangle = 0$ かつ $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s} \rangle = 0$ が成り立つことと定義する．

以下では，誤解が生じる恐れの少ない場合は，$\boldsymbol{x}$ のことも枠付き曲面と呼ぶことにする．$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s}$ とおく．このとき，$\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交枠場になることに注意する．これを枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ の枠と呼ぶ．

注意 1.2. 定義より，枠付き曲面はフロンタルになる．また，局所的にはフロンタルは枠付き曲面になる．フロンタルに関しては，例えば [1, 2] などを参照．

枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，U 上の関数 a_i, b_i, e_i, f_i 及び g_i $(i = 1, 2)$ を次のように定義し，枠付き曲面の基本不変量と呼ぶ．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u \\ \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_u \\ \boldsymbol{s}_u \\ \boldsymbol{t}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & f_1 \\ -e_1 & 0 & g_1 \\ -f_1 & -g_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_v \\ \boldsymbol{s}_v \\ \boldsymbol{t}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 & f_2 \\ -e_2 & 0 & g_2 \\ -f_2 & -g_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}.$$

また，上記の行列をそれぞれ$\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$とおき，基本行列と呼ぶ.

例 1.3. カスプ片$\boldsymbol{x}(u,v) = (u, v^2, v^3)$を考える．カスプ片は枠付き曲面になる．実際，$\boldsymbol{x}_u(u,v) = (1,0,0)$, $\boldsymbol{x}_v(u,v) = (0, 2v, 3v^2)$であるから，

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{9v^2+4}}(0, -3v, 2), \ \boldsymbol{s}(u,v) = (1,0,0)$$

とおけば，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$は枠付き曲面になる.

$$\boldsymbol{t}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{9v^2+4}}(0, 2, 3v)$$

となる．基本不変量は下記のようになる.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v\sqrt{9v^2+4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/(9v^2+4) & 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.4. ツバメの尾$\boldsymbol{x}(u,v) = (3u^4 + u^2 v, -4u^3 - 2uv, v)$を考える．ツバメの尾は枠付き曲面になる．実際，$\boldsymbol{x}_u(u,v) = 2(6u^2+v)(u,-1,0)$, $\boldsymbol{x}_v(u,v) = (u^2, -2u, 1)$であるから，

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+u^4}}(1, u, u^2), \quad \boldsymbol{s}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(u, -1, 0)$$

とおけば，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$は枠付き曲面になる．また，

$$\boldsymbol{t}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+u^4}\sqrt{1+u^2}}(u^2, u^3, -1-u^2)$$

となる.

基本不変量は下記のようになる

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (12u^2+2v)\sqrt{1+u^2} & 0 \\ \frac{u(u^2+2)}{\sqrt{1+u^2}} & -\frac{\sqrt{1+u^2+u^4}}{\sqrt{1+u^2}} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+u^2+u^4}\sqrt{1+u^2}} & -\frac{u(2+u^2)}{(1+u^2+u^4)\sqrt{1+u^2}} & \frac{u^2}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2+u^4}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 1.5. カスプ状交差帽子$\boldsymbol{x}(u,v) = (u, v^2, uv^3)$を考える．カスプ状交差帽子は枠付き曲面になる．実際，$\boldsymbol{x}_u(u,v) = (1, 0, v^3)$, $\boldsymbol{x}_v(u,v) = (0, 2v, 3uv^2)$であから，

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4}}(-2v^3, -3uv, 2), \quad \boldsymbol{s}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^6}}(1, 0, v^3)$$

とおけば，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$は枠付き曲面になる.

$$\boldsymbol{t}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4}\sqrt{1+v^6}}(-3uv^4, 2v^6+2, 3uv)$$

である．基本不変量は下記のようになる．

$$
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+v^6} & 0 \\ \frac{3uv^5}{\sqrt{1+v^6}} & \frac{v\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4}}{\sqrt{1+v^6}} \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6v\sqrt{1+v^6}}{4v^6+9u^2v^2+4} & 0 \\ -\frac{6v^2}{\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4}\sqrt{1+v^6}} & \frac{6u(2v^6-1)}{(4v^6+9u^2v^2+4)\sqrt{1+v^6}} & \frac{9uv^3}{\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4}(1+v^6)} \end{pmatrix}.
$$

例 1.6. 標準的な交差帽子 $f_{CR}(u,v)=(u,v^2,uv)$ を考える．この曲面はフロンタルにならないことが知られているが，以下のように，枠付き曲面の像として実現できる (写像 $\boldsymbol{x}$ の構成に関しては [4] も参照)．写像 $\boldsymbol{x}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{x}(r,\theta)=(r\cos\theta, r^2\sin^2\theta, r^2\cos\theta\sin\theta)$ と定義する．明らかに，$\boldsymbol{x}(\mathbb{R}^2)=f_{CC}(\mathbb{R}^2)$ である．このとき，$\boldsymbol{x}$ が枠付き曲面であることを示す．実際，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_r(r,\theta) &= (\cos\theta, 2r\sin^2\theta, 2r\cos\theta\sin\theta), \\
\boldsymbol{x}_\theta(r,\theta) &= (-r\sin\theta, 2r^2\cos\theta\sin\theta, r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta))
\end{aligned}
$$

であるから，$\boldsymbol{n}(r,\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1}}(-2r\sin^2\theta,-\cos\theta,2\sin\theta)$ とおくと，これは単位法ベクトルになる．また，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s}(r,\theta) &= \frac{1}{\sqrt{3\sin^2\theta+1}}(0,2\sin\theta,\cos\theta) \\
\boldsymbol{t}(r,\theta) &= \frac{1}{\sqrt{4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1}\sqrt{3\sin^2\theta+1}}(-(3\sin^2\theta+1), 2r\sin^2\theta\cos\theta, -4r\sin^3\theta)
\end{aligned}
$$

とおくと，$\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\}$ は正規直交枠になり，従って $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は枠付き曲面になる．更に，基本不変量は，次のようになる

$$
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2r\sin\theta(\sin^2\theta+1)}{\sqrt{3\sin^2\theta+1}} & \frac{-\cos\theta\sqrt{4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1}}{\sqrt{3\sin^2\theta+1}} \\ r^2\cos\theta\sqrt{3\sin^2\theta+1} & \frac{r\sin\theta\sqrt{4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1}}{\sqrt{3\sin^2\theta+1}} \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sin^2\theta\sqrt{3\sin^2\theta+1}}{4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1}\sqrt{3\sin^2\theta+1}} & \frac{2r\sin\theta\cos\theta(3\sin^2\theta+2)}{(4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1)\sqrt{3\sin^2\theta+1}} & \frac{4r\sin^2\theta}{\sqrt{4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1}(3\sin^2\theta+1)} \end{pmatrix}.
$$

1.2 枠付き曲面に対する基本定理

以下では，正則曲面論の基本定理の，枠付き曲面版を示す．まず，枠付き曲面の合同を定義する．

定義 1.7. 二つの枠付き曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}),(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{n}},\widetilde{\boldsymbol{s}}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が合同であるとは，$A\in SO(3)$ と $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ が存在して，次が成立することである：

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}(u,v)=A\boldsymbol{x}(u,v)+\boldsymbol{b},\quad \widetilde{\boldsymbol{n}}(u,v)=A\boldsymbol{n}(u,v),\quad \widetilde{\boldsymbol{s}}(u,v)=A\boldsymbol{s}(u,v).$$

以下，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{n}},\widetilde{\boldsymbol{s}})$ の基本行列をそれぞれ $(\mathcal{G},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, $(\widetilde{\mathcal{G}},\widetilde{\mathcal{F}_1},\widetilde{\mathcal{F}_2})$ とおく．基本行列は枠付き曲面の合同の不変量である．即ち，次が成り立つ

補題 1.8. 枠付き曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{n}},\widetilde{\boldsymbol{s}})$ が合同ならば，$(\mathcal{G},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=(\widetilde{\mathcal{G}},\widetilde{\mathcal{F}_1},\widetilde{\mathcal{F}_2})$ が成り立つ．

また，この補題の逆として，以下の定理が成り立つ．

定理 1.9 (枠付き曲面の基本定理). $(\mathcal{G},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)=(\widetilde{\mathcal{G}},\widetilde{\mathcal{F}_1},\widetilde{\mathcal{F}_2})$ ならば，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{n}},\widetilde{\boldsymbol{s}})$ は合同である

1.3 枠の変換による基本不変量の変化

一般に，基本不変量は枠の取り方に依存する．以下では枠の回転と反転による基本不変量の変化について述べる．枠付き曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ を考える．滑らかな関数 $\theta:U\to\mathbb{R}$ に対して，$\boldsymbol{s}_\theta,\boldsymbol{t}_\theta$ を次のように定義する．

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{s}_\theta\\ \boldsymbol{t}_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta(u,v) & -\sin\theta(u,v)\\ \sin\theta(u,v) & \cos\theta(u,v)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix}.$$

こうして得られた $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}_\theta,\boldsymbol{t}_\theta\}$ は $\boldsymbol{x}$ に沿う枠になる．この枠を，$\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\}$ に枠の回転 θ を施して得られる枠とよぶ．枠付き曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}_\theta)$ の基本不変量を $(\mathcal{G}^\theta,\mathcal{F}_1^\theta,\mathcal{F}_2^\theta)$ と記す．直接計算により，$(\mathcal{G}^\theta,\mathcal{F}_1^\theta,\mathcal{F}_2^\theta)$ は $(\mathcal{G},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ を用いて，次のように表せることがわかる．

命題 1.10. 次が成り立つ．

$$\mathcal{G}^\theta=\mathcal{G}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_1^\theta=\begin{pmatrix}0 & e_1\cos\theta-f_1\sin\theta & e_1\sin\theta+f_1\cos\theta\\ -e_1\cos\theta+f_1\sin\theta & 0 & g_1-\theta_u\\ -e_1\sin\theta-f_1\cos\theta & -g_1+\theta_u & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_2^\theta=\begin{pmatrix}0 & e_2\cos\theta-f_2\sin\theta & e_2\sin\theta+f_2\cos\theta\\ -e_2\cos\theta+f_2\sin\theta & 0 & g_2-\theta_v\\ -e_2\sin\theta-f_2\cos\theta & -g_2+\theta_v & 0\end{pmatrix}.$$

特に，$i=1,2$ に対して，

$$\begin{pmatrix}e_i^\theta\\ f_i^\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_i\\ f_i\end{pmatrix}$$

となる．

次に，枠の反転 $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\}\mapsto\{-\boldsymbol{n},\boldsymbol{s},-\boldsymbol{t}\}$ による不変量の変化を調べる．変換後の枠を $\{\boldsymbol{n}_r,\boldsymbol{s}_r,\boldsymbol{t}_r\}$ とおき，この枠での基本不変量を $\mathcal{G}^r,\mathcal{F}_1^r,\mathcal{F}_2^r$ とおく．このとき，

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_r\\ \boldsymbol{s}_r\\ \boldsymbol{t}_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix}$$

であるから，これらを直接代入することにより，下記の命題が成り立つ．

命題 1.11. 次が成り立つ．

$$\mathcal{G}^r=\mathcal{G}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad \mathcal{F}_1^r=\begin{pmatrix}0&-e_1&f_1\\e_1&0&-g_1\\-f_1&g_1&0\end{pmatrix},\qquad \mathcal{F}_2^r=\begin{pmatrix}0&-e_2&f_2\\e_2&0&-g_2\\-f_2&g_2&0\end{pmatrix}.$$

特に，$i=1,2$ に対して，

$$\begin{pmatrix}e_i^r\\f_i^r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_i\\f_i\end{pmatrix}$$

となる．

1.4 定義域と値域の座標変換

ここでは，座標変換による基本不変量の変化の仕方を見る．合成関数の微分公式より，次の命題が示せる．

命題 1.12. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を枠付き曲面とし，座標変換 $(u,v):V\to U$ を $(p,q)\mapsto(u(p,q),v(p,q))$ とおく．このとき，座標変換後の枠付き曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})\circ(u,v):V\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ の基本不変量 $(\widetilde{\mathcal{G}},\widetilde{\mathcal{F}_1},\widetilde{\mathcal{F}_2})$ は以下で与えられる．

$$\widetilde{\mathcal{G}}=\begin{pmatrix}u_p&v_p\\u_q&v_q\end{pmatrix}\mathcal{G},\qquad \begin{pmatrix}\widetilde{e_1}&\widetilde{f_1}&\widetilde{g_1}\\\widetilde{e_2}&\widetilde{f_2}&\widetilde{g_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_p&v_p\\u_q&v_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1&f_1&g_1\\e_2&f_2&g_2\end{pmatrix}.$$

枠付き曲面という性質は，$\boldsymbol{x}$ の値域の微分同相写像で不変な性質である．即ち，次が成り立つ．

命題 1.13. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を枠付き曲面とし，$\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を微分同相写像とする．このとき，$\boldsymbol{n}^\Phi,\boldsymbol{s}^\Phi:U\to S^2$ が存在して，$(\varphi\circ\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}^\Phi,\boldsymbol{s}^\Phi):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は枠付き曲面になる．

2 可積分条件

この節では，枠付き曲面の可積分条件から得られる基本不変量の間の関係について述べる．

2.1 可積分条件と基本不変量

三つのベクトルの組

$$\Omega = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

を考える．連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \Omega_u = \mathcal{F}_1 \Omega, \\ \Omega_v = \mathcal{F}_2 \Omega, \end{cases}$$

の可積分条件は，

$$\mathcal{F}_{2,u} - \mathcal{F}_{1,v} = [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2] \tag{1}$$

となる． 但し，n 次正方行列 $A, B \in M(n)$ に対して，$[A, B] = AB - BA$ とする．このとき，Ω が局所的に一意的に存在する．更に，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u \\ \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

となる $\boldsymbol{x}$ が存在するためには

$$\frac{\partial}{\partial v}(a_1 \boldsymbol{s} + b_1 \boldsymbol{t}) = \frac{\partial}{\partial u}(a_2 \boldsymbol{s} + b_2 \boldsymbol{t}) \tag{2}$$

が必要十分である．(1) を基本不変量を用いて書き直すと，

$$\begin{cases} e_{1,v} - f_1 g_2 = e_{2,u} - f_2 g_1, \\ f_{1,v} - g_1 e_2 = f_{2,u} - g_2 e_1, \\ g_{1,v} - e_1 f_2 = g_{2,u} - e_2 f_1. \end{cases}$$

(2) を基本不変量を用いて書き直すと，

$$\begin{cases} a_{1,v} - b_1 g_2 = a_{2,u} - b_2 g_1, \\ b_{1,v} - a_2 g_1 = b_{2,u} - a_1 g_2, \\ a_1 e_2 + b_1 f_2 = a_2 e_1 + b_2 f_1, \end{cases}$$

が得られる．

また，枠の変換での可積分条件と元の枠での可積分条件の関係は，次のように記述できる．

命題 2.1. 以下の (i) から (iii) は同値．
(i) $\mathcal{F}_{2,u} - \mathcal{F}_{1,v} = [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$,
(ii) $\mathcal{F}^\theta_{2,u} - \mathcal{F}^\theta_{1,v} = [\mathcal{F}^\theta_1, \mathcal{F}^\theta_2]$,
(iii) $\mathcal{F}^\tau_{2,u} - \mathcal{F}^\tau_{1,v} = [\mathcal{F}^\tau_1, \mathcal{F}^\tau_2]$.

3　枠付き曲面の曲率

3.1　曲率の定義と性質

正則曲面 $\boldsymbol{x}: U \to \mathbb{R}^3$ に対して，第一基本量及び第二基本量を E, F, G, L, M, N とおく (正則曲面の微分幾何学に関しては，例えば [7] を参照)．即ち，

$$\begin{aligned} E &= \langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_u \rangle,\ F = \langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v \rangle,\ G = \langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{x}_v \rangle, \\ L &= -\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{n}_u \rangle,\ M = -\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{n}_v \rangle,\ N = -\langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{n}_v \rangle. \end{aligned}$$

但し，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{x}$ 曲面の単位法ベクトル $\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v / \|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\|$ とする．このとき，$\boldsymbol{x}$ のガウス曲率 K 及び平均曲率 H は以下のように定義される．

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

正則曲面 $\boldsymbol{x}$ の基本不変量，ガウス曲率及び平均曲率は，その単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて得られる枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ の基本不変量を用いて次のように記述できる．

補題 3.1.

$$\begin{aligned} E &= a_1^2 + b_1^2,\ F = a_1 b_1 + a_2 b_2,\ G = a_2^2 + b_2^2, \\ L &= -a_1 e_1 - b_1 f_1,\ M = -a_1 e_2 - b_1 f_2,\ N = -a_2 e_2 - b_2 f_2. \end{aligned}$$

可積分条件 $\boldsymbol{x}_{uv} = \boldsymbol{x}_{vu}$ より，$M = -a_1 e_2 - b_1 f_2 = -a_2 e_1 - b_2 f_1$ が成り立つことに注意する．

上記の補題と直接計算により，次の命題が示せる．

命題 3.2.

$$K = \frac{e_1 f_2 - f_1 e_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad H = \frac{-a_1 f_2 + b_1 e_2 + a_2 f_1 - b_2 e_1}{2(a_1 b_2 - b_1 a_2)}.$$

$$J_F = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},\ K_F = \det \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix},\ H_F = -\frac{1}{2}\left\{ \det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} \right\}$$

とおくと，K, H は

$$K = \frac{K_F}{J_F},\ H = \frac{H_F}{J_F}$$

とあらわせる．このことを踏まえて，枠付き曲面の曲率 C_F を次のように定義する．

定義 3.3. 枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，曲率 C_F を $C_F = (J_F, K_F, H_F)$ と定義する．

注意 3.4. 可積分条件 (1) より，$K_F = g_{1,v} - g_{2,u}$ が成り立つ．

正則点の定義より，曲面が点 $p\in U$ の周りで正則であるためには，$J_F(p)\neq 0$ であることが必要十分である．次の命題は．曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})$ が点 $p\in U$ の周りでルジャンドルはめ込みであるための条件を，不変量を用いて判定するものである．

補題 3.5. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を枠付き曲面とし，$p\in U$ とする．$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})$ が p の周りでルジャンドルはめ込みあるためには．$C_F(p)\neq 0$ が必要十分である．

証明には，可積分条件などを用いる．

注意 3.6. 枠の変換による J_F, K_F 及び H_F の変化に関して，次の関係が成り立つ．枠付き曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}_\theta)$ の不変量を $C_F^\theta=(J_F^\theta,K_F^\theta,H_F^\theta)$ とおくと，$(J_F^\theta,K_F^\theta,H_F^\theta)=(J_F,K_F,H_F)$. また，枠付き曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}_r)$ の不変量を (J_F^r,K_F^r,H_F^r) とおくと，$(J_F^r,K_F^r,H_F^r)=(-J_F,-K_F,H_F)$.

更に，定義域の座標変換 φ に対して，$(\widetilde{J_F},\widetilde{K_F},\widetilde{H_F})=((\det J_\varphi)J_F,(\det J_\varphi)K_F,(\det J_\varphi)H_F)$. 但し，$J_\varphi$ は座標変換 φ のヤコビ行列，が成り立つ

次に，$\boldsymbol{s}$ も含めた組 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ がはめ込みになる条件について考える．その前に，言葉と記号を用意しておく．

定義 3.7. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が $p\in U$ の周りではめ込みになっているとき，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ は $p\in U$ の周りで枠付きはめ込であると呼ぶ．

記号 I_F を次で定める．

$$I_F=\left(J_F,K_F,H_F,\det\begin{pmatrix}e_1 & g_1\\ e_2 & g_2\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}f_1 & g_1\\ f_2 & g_2\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}a_1 & e_1\\ a_2 & e_2\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}a_1 & g_1\\ a_2 & g_2\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}b_1 & g_1\\ b_2 & g_2\end{pmatrix}\right)$$

ここで，後半の行列式は可積分条件に現れる行列式である (第2.1節を参照)．また，$\det\begin{pmatrix}a_1 & e_1\\ a_2 & e_2\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}b_1 & f_1\\ b_2 & f_2\end{pmatrix}$ であることに注意しておく．

以上のもと，次の補題が成り立つ．

補題 3.8. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を枠付き曲面とする，このとき，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ が $p\in U$ の周りで枠付きはめ込みであるためには，$I_F(p)\neq 0$ であることが必要十分である．

以上をまとめると，次の定理を得る．

定理 3.9. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を枠付き曲面とする．$p\in U$ に対して，以下のことが成り立つ．

(1) $\boldsymbol{x}$ が p の周りで正則であるためには，$J_F(p)\neq 0$ が必要十分である．

(2) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})$ が p の周りでルジャンドルはめ込みであるためには，$C_F(p)\neq 0$ が必要十分である．

(3) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ が p の周りで枠付きはめ込みであるためには，$I_F(p)\neq 0$ が必要十分である．

3.2 曲率 C_F の計算例

この節では，枠付き曲面の曲率 C_F の計算例を紹介する．

例 3.10. 例 1.3 のカスプ片を考える．
例 1.3 の計算結果より，

$$J_F(u,v) = v\sqrt{9v^2+4},\ K_F(u,v)=0,\ H_F(u,v)=\frac{3}{9v^2+4}.$$

となる．

例 3.11. 例 1.4 のツバメの尾を考える．
例 1.4 の計算結果より，

$$J_F = 2(6u^2+v)\sqrt{1+u^2+u^4},\quad K_F=0,\quad H_F=-\frac{1+5u^2+5u^4+u^6}{2(1+u^2+u^4)(1+u^2)}$$

となる．

例 3.12. 例 1.5 のカスプ状交差帽子の像を考える．
例 1.5 の計算結果より，

$$\begin{aligned} J_F &= v\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4},\quad K_F = \frac{36v^3}{(4v^6+9u^2v^2+4)\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4}}, \\ H_F &= \frac{3u(1-4v^6)}{4v^6+9u^2v^2+4}. \end{aligned}$$

となる．

例 3.13. 例 1.6 の交差帽子を考える．
例 1.6 の計算結果より，

$$\begin{aligned} J_F(r,\theta) &= \frac{r^2\{2\sin\theta(\sin^2\theta+1)+\cos^2\theta+1\}\sqrt{4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1}}{3\sin^2\theta+1}, \\ K_F(r,\theta) &= -\frac{2\sin^2\theta}{(4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1)^{2/3}}, \\ H_F(r,\theta) &= -\frac{2\cos\theta(-3r^2\sin^6\theta+8r^2\sin^4\theta+3r^2\sin\theta+3\sin^2\theta+2)}{(4r^2\sin^4\theta+3\sin^2\theta+1)(2\sin^2\theta+1)}. \end{aligned}$$

となる．特に，任意の (r,θ) に対して $C_F(r,\theta)\neq(0,0,0)$ であるから，$\boldsymbol{x}$ はフロントであることがわかる，

4 ルジャンドル曲線の一径数族としての枠付き曲面

この節では，ユークリッド空間内の枠付き曲線に沿ったルジャンドル曲線の 1 径数族として得られる枠付き曲面について考察する．ルジャンドル曲線及び枠付き曲線についての詳細は，それぞれ文献 [5] 及び [8] を参照してほしい．

I, J を $\mathbb{R}$ または区間とする．また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{a}$ を原点とする $\boldsymbol{x}$ の直交補空間を $\langle \boldsymbol{x} \rangle_{\boldsymbol{a}}^{\perp}$ と記し，特に $\boldsymbol{a} = 0$ のときは，$\langle \boldsymbol{x} \rangle^{\perp}$ と記すことにする．

$(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲線とし，その曲率を (ℓ, m, n, α) とする．$\boldsymbol{\mu} := \nu_1 \times \nu_2$ とおく．各 $u \in I$ に対して，$\boldsymbol{\mu}(u)$ の直交補空間上の曲線 $\boldsymbol{x}(u, \cdot) : J \to \langle \boldsymbol{\mu}(u) \rangle_{\gamma(u)}^{\perp}$ を考える．$\langle \boldsymbol{\mu}(u) \rangle^{\perp}$ を，$\nu_1(u) \mapsto (1,0)$, $\nu_2(u) \mapsto (0,1)$ の同型写像を通して $\mathbb{R}^2$ と考えたとき，$\boldsymbol{x}(u, \cdot)$ は $\mathbb{R}^2$ 上のフロンタルになっているとする．つまり，ある $\nu^L(u, \cdot) : J \to S^2 \subset \langle \boldsymbol{\mu}(u) \rangle^{\perp}$ が存在して，$\langle \boldsymbol{x}_v(u,v), \nu^L(u,v) \rangle = 0$ が全ての $v \in J$ に対して成り立つとする．ここで，$\langle , \rangle$ は $\langle \boldsymbol{\mu}(u) \rangle^{\perp}$ に，上記の同型対応から自然に定まる内積とする．つまり，$\boldsymbol{a}_1 = a_1 \nu_1(u) + b_1 \nu_2(u)$, $\boldsymbol{a}_2 = a_2 \nu_1(u) + b_2 \nu_2(u) \in \langle \boldsymbol{\mu}(u) \rangle^{\perp}$ に対して，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$ とする．これは $\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積と等しいので，以後同じ記号を用いることにする．このルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{x}(u, \cdot), \nu_{\boldsymbol{x}}(u, \cdot))$ の枠を $\{\nu^L, \boldsymbol{\mu}^L\}$，曲率を $(\ell^L(u, \cdot), \beta^L(u, \cdot))$ とおく．$\nu^L = \nu_1^L \nu_1 + \nu_2^L \nu_2$ とおくと，$\boldsymbol{\mu}^L = -\nu_2^L \nu_1 + \nu_1^L \nu_2$ となる．

以上の設定の下で，写像 $\boldsymbol{x} : I \times J \to \mathbb{R}^3$ を考える．$\boldsymbol{x}(u,v)$ は，ある関数 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 : I \times J \to \mathbb{R}$ を用いて，$\boldsymbol{x}(u,v) = \gamma(u) + \boldsymbol{x}_1(u,v)\nu_1(u) + \boldsymbol{x}_2(u,v)\nu_2(u)$ と表せることに注意する．写像 $\boldsymbol{x}$ は一般には枠付き曲面にはならない．そこで，次の仮定をする：ある関数 $\theta : I \times J \to \mathbb{R}$ が存在して，$\boldsymbol{n}(u,v) = \cos\theta(u,v)\nu^L(u,v) + \sin\theta(u,v)\boldsymbol{\mu}(u)$ は $\langle \boldsymbol{x}_u(u,v), \boldsymbol{n} \rangle = 0$ を満たす．また，$\boldsymbol{s}(u,v) = -\boldsymbol{\mu}^L(u,v)$ とおく．構成法より次の命題が成り立つ．

命題 4.1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : I \times J \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ は枠付き曲面になる．

この枠付き曲面の枠を $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ とおく．$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s} = -\cos\theta \boldsymbol{\mu} + \sin\theta \nu^L$ に注意する．
枠付き曲面の基本不変量を計算すると，次のようになる．

定理 4.2. 上記の記号のもと，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : I \times J \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ の不変量は，

$$
\begin{aligned}
a_1(u,v) &= (x_{1u}(u,v) - x_2(u,v)\ell(u))\nu_2^L(u,v) - (x_{2u}(u,v) + x_1(u,v)\ell(u))\nu_1^L(u,v), \\
b_1(u,v) &= \sin\theta(u,v)\big((x_{1u}(u,v) - x_2(u,v)\ell(u))\nu_1^L(u,v) + (x_{2u}(u,v) + x_1(u,v)\ell(u))\nu_2^L(u,v)\big) \\
&\quad - \cos\theta(u,v)(\alpha(u) + x_1(u,v)m(u) + x_2(u,v)n(u)), \\
a_2(u,v) &= -\beta^L(u,v), \\
b_2(u,v) &= 0, \\
e_1(u,v) &= \sin\theta(u,v)(n(u)\nu_1^L(u,v) - m(u)\nu_2^L(u,v)) \\
&\quad + \cos\theta(u,v)(\nu_{1u}^L(u,v)\nu_2^L(u,v) - \nu_{2u}^L(u,v)\nu_1^L(u,v) - \ell(u)), \\
f_1(u,v) &= -\theta_u(u,v) - m(u)\nu_1^L(u,v) - n(u)\nu_2^L(u,v), \\
g_1(u,v) &= \sin\theta(u,v)(\nu_{2u}^L(u,v)\nu_1^L(u,v) - \nu_{1u}^L(u,v)\nu_2^L(u,v) + \ell(u)) \\
&\quad + \cos\theta(u,v)(n(u)\nu_1^L(u,v) - m(u)\nu_2^L(u,v)), \\
e_2(u,v) &= -\cos\theta(u,v)\ell^L(u,v), \\
f_2(u,v) &= -\theta_v(u,v), \\
g_2(u,v) &= \sin\theta(u,v)\ell^L(u,v).
\end{aligned}
$$

上記の定理の応用として，ルジャンドル曲線の枠付き曲線に沿った一径数族として得られる枠付き曲面にあらわれる特異点の判定が得られる．

定理 4.3. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}) : I \times J \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲線 γ に沿ったルジャンドル曲線の一径数族とする．$\boldsymbol{x}(u,0)=\gamma(u)$ かつ， γ の特異点集合は離散的であると仮定する．$(0,0)$ を $\boldsymbol{x}$ の特異点とすると，以下が成り立つ．

(A) $\beta^L(0,0)=0$ かつ $\alpha(0)\neq 0$ のとき．

(1) $\boldsymbol{x}$ が $(0,0)$ でカスプ片と $\mathcal{A}$ 同値であるためには，$\beta^L_v(0,0)\neq 0$ かつ $\ell^L(0,0)\neq 0$ であることが必要十分である．

(2) $\boldsymbol{x}$ が $(0,0)$ で ツバメの尾と $\mathcal{A}$ 同値であるためには，$\beta^L_v(0,0)=0, \beta^L_{vv}(0,0)\neq 0, \beta^L_u(0,0)\neq 0$ かつ $\ell^L(0,0)\neq 0$ であることが必要十分である．

(3) $\boldsymbol{x}$ が $(0,0)$ で カスプ状交差帽子と $\mathcal{A}$ 同値であるためには，$\beta^L_v(0,0)\neq 0, \ell^L(0,0)=0$ かつ $(\ell^L\circ\delta)'(0)\neq 0$ であることが必要十分である．

(B) $\beta^L(0,0)\neq 0$ かつ $\alpha(0)=0$ のとき．

(1) $\boldsymbol{x}$ が $(0,0)$ で カスプ片と $\mathcal{A}$ 同値であるためには，$\alpha'(0)\neq 0$ かつ $\nu^L_1(0,0)m(0)+\nu^L_2(0,0)n(0)\neq 0$ であることが必要十分である．

(2) $\boldsymbol{x}$ が $(0,0)$ で ツバメの尾と $\mathcal{A}$ 同値であるためには，$\alpha'(0)=0, \alpha''(0)\neq 0, \nu^L_1(0,0)n(0)-\nu^L_2(0,0)m(0)\neq 0$ かつ $\nu^L_1(0,0)m(0)+\nu^L_2(0,0)n(0)\neq 0$ であることが必要十分である．

(3) $\boldsymbol{x}$ が $(0,0)$ で カスプ状交差帽子と $\mathcal{A}$ 同値であるためには，$\alpha'(0)\neq 0, \nu^L_1(0,0)m(0)+\nu^L_2(0,0)n(0)=0$ かつ $((\beta^L(\nu^L_1 m+\nu^L_2 n+\theta_u)+a_1\theta_v)\circ\delta)'(0)\neq 0$ であることが必要十分である．

ここで δ は $\boldsymbol{x}$ の特異曲線である．

証明は，可積分条件や定理 3.9 と，[3] 及び [10] の判定法を用いる．

定理 4.3 の系として，次を得る．

系 4.4. 設定は定理 4.3 と同様とする．$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を正則曲線とし，$\boldsymbol{x}(u,\cdot) : J \to \langle\boldsymbol{\mu}(u)\rangle^{\perp}_{\gamma(u)}$ が $0\in J$ で 3/2-カスプと微分同相とする．更に $\boldsymbol{x}(u,0)=\gamma(u)$ と仮定する．このとき，$\boldsymbol{x} : I\times J \to \mathbb{R}^3$ は $(u,0)$ の周りでフロントであり，$\boldsymbol{x}$ は $(u,0)$ でカスプ片と微分同相である．

また，次の定理も成立する．

定理 4.5. $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ が $0\in U$ でカスプ片に微分同相であるとする．このとき，定義域の 0 の周りでのパラメータ変換 $\phi : I\times J \to U$ と，滑らかな写像 $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}) : I\times J \to \Delta$ が存在して，$(\boldsymbol{x}\circ\phi,\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}) : I\times J \to \mathbb{R}^3\times\Delta$ は正則曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ に沿った 3/2 カスプの一径数族になる．

証明には [12] で与えられているカスプ片の標準形を用いる．

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, *Singularities of Caustics and Wave Fronts.* Mathematics and Its Applications **62** Kluwer Academic Publishers (1990).

[2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol.* I, Birkhäuser, 1986.

[3] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, Singularities of maximal surfaces. *Math. Z.* **259** (2008), 827–848.

[4] T. Fukui, M. Hasegawa, Fronts of Whitney umbrella-a differential geometric approach via blowing up. *J. Singul.* 4 (2012), 35–67.

[5] T. Fukunaga, M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves, *J. Geometry.* **104** (2013), 297–307.

[6] T. Fukunaga, M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space, in preparation.

[7] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. Third edition.* Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[8] S. Honda, M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, *Adv. Geom.* **16** (2016), 265–276.

[9] S. Izumiya, M. C. Romero-Fuster, M. A. S. Ruas, F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint.* World Scientific Pub. Co Inc. 2015.

[10] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space. *Pacific J. Math.* **221** (2005), 303–351.

[11] L. F. Martins, J.J. Nuno-Ballesteros, Contact properties of surfaces in $\mathbb{R}^3$ with corank 1 singularities. *Tohoku Math. J.* **67**(1) (2015), 105–124.

[12] L. Martins, K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges. *Canad. J. Math.* **68** (2016), 445–462.

[13] L. Martins, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts. *Preprint.* (2015), arXiv: 1308.2136v3.

[14] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, The geometry of fronts. *Ann. of Math. (2)* **169** (2009), 491–529.

[15] K. Teramoto, Parallel and dual surfaces of cuspidal edges. *Differential Geom. Appl.* **44** (2016), 52–62.